wildan-wicaksono.github.io

Solusi OSK SMA 2024
Bidang Matematika

Wildan Bagus Wicaksono

2024

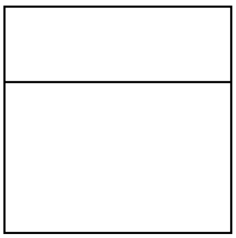
Bagian I – Soal

1. Kemampuan Dasar

Terdiri dari 10 soal isian singkat. Setiap soal dijawab dengan menuliskan **jawaban akhirnya saja** dan dipastikan merupakan **bilangan bulat**. Soal yang dijawab benar bernilai 2 poin, sedangkan soal yang dijawab salah atau tidak dijawab bernilai 0 poin.

. . . .

1 Sebuah persegi dibagi menjadi dua persegi panjang seperti terlihat pada gambar. Diketahui hasil penjumlahan kedua keliling persegi panjang adalah 60, maka luas persegi adalah . . . .



2 Diketahui ada 6 pilihan jalan yang dapat digunakan untuk bepergian dari kota A ke kota B dan ada 8 pilihan jalan yang dapat digunakan dari kota B ke kota C. Jika seseorang akan bepergian dari kota A ke kota C melalui kota B dan pulang kembali lagi ke kota A melalui jalan-jalan yang berbeda dari ketiga saat pergi, banyaknya cara memilih jalan yang dapat dilalui adalah . . . .

3 Pada papan tertulis 90 bilangan asli $1, 1, \cdots, a, b$ (ada sebanyak 88 bilangan 1). Hasil penjumlahan seluruh bilangan di papan adalah A dan demikian juga hasil perkalian semua bilangan di papan adalah A. Nilai A adalah . . . .

4 Misalkan a, b bilangan bulat positif yang tidak memiliki faktor persekutuan selain 1. Jika berlaku

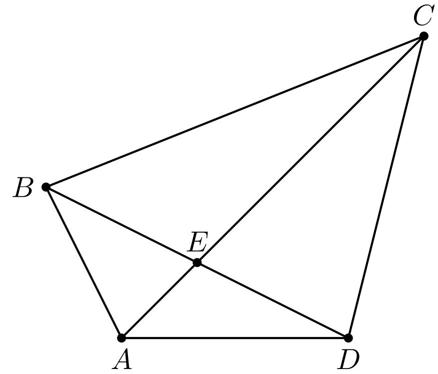
$$\frac{1+2+3+\cdots+104}{3+4+5+\cdots+106} = \frac{a}{b},$$

maka nilai dari $a+b$ adalah . . . .

5 Bilangan OSK adalah bilangan 4 angka yang tidak dimulai dengan angka 0 dan hasil penjumlahan semua digitnya adalah 8. Sebagai contoh, 2024 merupakan bilangan OSK. Banyaknya bilangan OSK adalah . . . .

6 Misalkan $u_1, u_2, u_3, \cdots$ suatu barisan geometri dengan $u_1 > u_2$. Jika $u_2 = 8$ dan $u_5 + u_7 = \frac{17}{4}u_6$, nilai dari u_1 adalah . . . .

7 Diberikan segiempat $ABCD$ dengan luas segitiga AED sama dengan luas segitiga BEC. Jika $AB = 50, AE = 45$, dan $AC = 108$, maka panjang CD adalah . . . .



8 Banyak bilangan dua digit $\overline{ab}$ dengan $a, b \neq 0$ sehingga $\overline{ab} + \overline{ba}$ merupakan bilangan kelipatan 66 adalah . . . .

9 Misalkan k adalah bilangan bulat positif terkecil kelipatan 2024 yang memiliki 28 faktor positif. Sisa hasil bagi k oleh 100 adalah . . . .

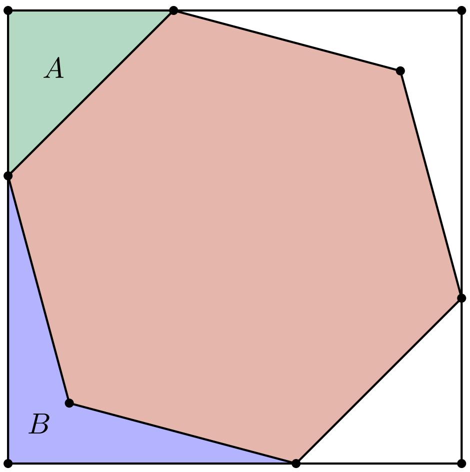
10 Misalkan x, y bilangan real positif dengan $x > y$. Diketahui bahwa $x^2 + y^2 = \frac{545}{272}xy$, maka $\frac{x+y}{x-y}$ adalah . . . .

2. Kemampuan Lanjut

Terdiri dari 10 soal isian singkat. Setiap soal dijawab dengan menuliskan **jawaban akhirnya saja** dan dipastikan merupakan **bilangan bulat**. Soal yang dijawab benar bernilai 4 poin, soal yang dijawab salah bernilai -1 poin, dan soal yang tidak dijawab bernilai 0 poin.

. . . .

11 Suatu segienam beraturan disisipkan ke dalam sebuah persegi panjang seperti terlihat pada gambar di bawah ini. Jika luas A dan B berturut-turut adalah 24 dan 23, maka luas segienam beraturan adalah . . . .



12 Banyaknya himpunan bagian A dari $\{24, 25, 26, \cdots, 35\}$ sehingga hasil penjumlahan unsur terbesar dan terkecil dari A sama dengan 59 adalah . . . .

13 Untuk setiap bilangan asli n, misalkan $f(n)$ menyatakan faktor ganjil terbesar dari n dan $p(n) = f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n)$. Jika $p(n) = 8145$, maka nilai dari n adalah . . . .

14 Diberikan suku banyak $P(x) = x^3 + Dx^2 + Ex + 1$ dan $P(-1) = 4$. Jika a, b, c merupakan akar-akar dari $P(x) = 0$ memenuhi

$$\left(a^2 - bc\right)\left(b^2 - ca\right)\left(c^2 - ab\right) = 40.$$

Maka nilai dari $(D + E)^2$ adalah . . . .

15 Banyaknya barisan bilangan bulat positif dengan enam suku $a_1, a_2, \cdots, a_6$ yang mungkin sehingga $1 \leq a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \leq 4$ dan tidak ada dua suku berurutan yang jumlahnya 4 adalah . . . .

16 Diberikan sebuah segitiga ABC yang siku-siku pada sudut B. Lingkaran ω merupakan lingkaran dalam segitiga ABC yang meyinggung sisi BC pada titik D. Titik E terletak pada ω sehingga PE merupakan diameter ω. Perpanjangan garis AE memotong ω kedua kalinya di titik F dan memotong sisi BC di titik G. Apabila $EF = 3$ dan $FG = 4$, maka panjang AE dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{p}{r}\sqrt{q}$ dengan p, q, r merupakan bilangan bulat positif, satu-satunya faktor kuadrat dari q adalah 1, dan $\text{FPB}(p, r) = 1$. Nilai dari $p + q + r$ adalah . . . .

17 Diketahui a, b, c merupakan bilangan real positif yang memenuhi

$$a + b + c = \frac{32}{a} + \frac{32}{b} + \frac{32}{c} = 24.$$

Nilai terbesar yang mungkin dicapai oleh $\frac{a^2+32}{a}$ adalah . . . .

18 Untuk setiap bilangan real x, notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar kurang dari atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lfloor 1{,}1 \rfloor = 1$, $\lfloor 3 \rfloor = 3$, dan sebagainya. Jika ada tepat sebanyak 1000 bilangan berbeda pada barisan

$$\left\lfloor \frac{1^2}{2024} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{2^2}{2024} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{3^2}{2024} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{n^2}{2024} \right\rfloor,$$

maka nilai dari n adalah . . . .

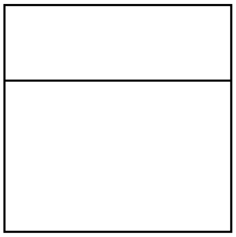
19 Banyaknya pemetaan $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ sehingga $f(f(x)) \in \{2, 4\}$ untuk setiap $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ adalah . . . .

20 Pada segitiga ABC, titik D dan E terletak pada garis BC sehingga B, D, E, C terletak pada urutan tersebut. Diketahui bahwa $BD : DE : EC = 4 : 2 : 5$ dan garis-garis AD, AE membagi tiga $\angle BAC$ sama besar. Garis AD dan AE masing-masing memotong lingkaran luar ABC pada titik F dan G. Nilai dari $\frac{DF}{EG}$ dapat dinyatakan dalam bentuk $\sqrt{\frac{p}{q}}$ untuk suatu bilangan bulat positif p dan q yang relatif prima, nilai dari $p + q$ adalah . . . .

Bagian II – Solusi

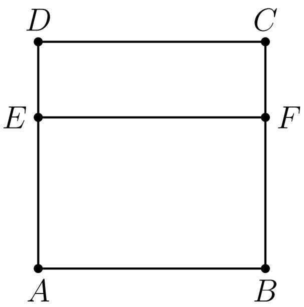
3. Solusi Kemampuan Dasar

1 Sebuah persegi dibagi menjadi dua persegi panjang seperti terlihat pada gambar. Diketahui hasil penjumlahan kedua keliling persegi panjang adalah 60, maka luas persegi adalah . . . .



Jawab: 100

Misalkan panjang sisi persegi adalah s.



Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} 60 &= (AB + BF + FE + EA) + (EF + FC + CD + DE) \\ &= (AB + FE + EF + CD) + (BF + FC) + (EA + DE) \\ &= 4s + s + s \\ &= 6s \end{aligned}$$

sehingga $s = 10$. Jadi, luasnya adalah $s^2 = \boxed{100}$.

. . . .

2 Diketahui ada 6 pilihan jalan yang dapat digunakan untuk bepergian dari kota A ke kota B dan ada 8 pilihan jalan yang dapat digunakan dari kota B ke kota C. Jika seseorang akan bepergian dari kota A ke kota C melalui kota B dan pulang kembali lagi ke kota A melalui jalan-jalan yang berbeda dari ketiga saat pergi, banyaknya cara memilih jalan yang dapat dilalui adalah . . . .

Jawab: 1680

Karena $A \to B$ ada 6 cara dan $B \to C$ ada 8 cara, maka $A \to B \to C$ ada $6 \cdot 8 = 48$ cara. Untuk kembali pulang, $C \to B$ ada 7 cara karena salah satu jalan telah dilalui, kemudian $B \to A$ ada 5 cara sehingga $C \to B \to A$ ada $7 \cdot 5 = 35$ cara. Jadi, total kemungkinannya adalah $48 \cdot 35 = \boxed{1680}$.

. . . .

3 Pada papan tertulis 90 bilangan asli $1, 1, \cdots, a, b$ (ada sebanyak 88 bilangan 1). Hasil penjumlahan seluruh bilangan di papan adalah A dan demikian juga hasil perkalian semua bilangan di papan adalah A. Nilai A adalah . . . .

Jawab: 180

Dari sini diperoleh

$$1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot a \cdot b = A = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{88} + a + b$$

sehingga $ab = 88 + a + b$. Ini berarti $(a-1)(b-1) = 89$ sehingga $(a-1, b-1) = (1, 89), (89, 1)$. Diperoleh $(a, b) = (2, 90), (90, 2)$ sehingga $A = ab = \boxed{180}$.

. . . .

4 Misalkan a, b bilangan bulat positif yang tidak memiliki faktor persekutuan selain 1. Jika berlaku

$$\frac{1 + 2 + 3 + \cdots + 104}{3 + 4 + 5 + \cdots + 106} = \frac{a}{b},$$

maka nilai dari $a + b$ adalah . . . .

Jawab: 214

Perhatikan bahwa $1 + 2 + \cdots + 104 = \frac{104(104+1)}{2} = 52 \cdot 105$. Sedangkan, $3 + 4 + 5 + \cdots + 106$ merupakan deret aritmetika dengan beda 1 sehingga

$$3 + 4 + \cdots + 106 = \frac{104}{2}(2 \cdot 3 + 103 \cdot 1) = 52 \cdot 109.$$

Jadi, $\frac{a}{b} = \frac{52 \cdot 105}{52 \cdot 109} = \frac{105}{109}$ sehingga $a = 105$ dan $b = 109$. Jadi, $a + b = \boxed{214}$.

. . . .

5 Bilangan OSK adalah bilangan 4 angka yang tidak dimulai dengan angka 0 dan hasil penjumlahan semua digitnya adalah 8. Sebagai contoh, 2024 merupakan bilangan OSK. Banyaknya bilangan OSK adalah . . . .

Jawab:

Misalkan bilangan empat digit tersebut adalah $abcd$ yang mana harus memenuhi $a + b + c + d = 8$.

Star and Bar Theorem

Diberikan bilangan bulat $k \geq 0$. Banyaknya solusi bilangan bulat tak negatif $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ yang memenuhi $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$ adalah

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

Menurut Star and Bar Theorem, banyaknya solusi bilangan bulat tak negatif (a, b, c, d) yang memenuhi adalah

$$\binom{8+4-1}{8} = \binom{11}{8} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8!}{8! \cdot 3!} = 165.$$

Namun, dari semua solusi ini ada kasus di mana $a = 0$. Maka banyaknya solusi yang terhitung sebelumnya perlu dikurangi saat $a = 0$, yaitu banyaknya solusi $b + c + d = 8$, ada sebanyak

$$\binom{8+3-1}{8} = \binom{10}{8} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{8! \cdot 2!} = 45.$$

Jadi, banyaknya bilangan empat digit *abcd* yang memenuhi adalah $165 - 45 = \boxed{120}$.

. . . .

6 Misalkan $u_1, u_2, u_3, \cdots$ suatu barisan geometri dengan $u_1 > u_2$. Jika $u_2 = 8$ dan $u_5 + u_7 = \frac{17}{4}u_6$, nilai dari u_1 adalah . . . .

Jawab: 32

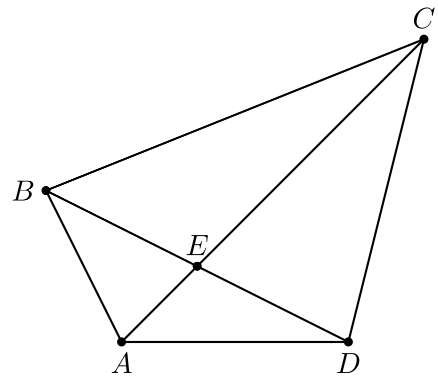
Misalkan $u_1 = a$ dan r sebagai rasio barisan geometri tersebut, maka $u_n = ar^{n-1}$. Karena $u_1 > u_2$, maka $r < 1$ dan $a \neq 0$. Ini berarti $\frac{17}{4}ar^5 = ar^4 + ar^6$ sehingga

$$0 = 4r^6 - 17r^5 + 4r^4 = r^4\left(4r^2 - 17r + 4\right) = r^4(4r-1)(r-4).$$

Ini brrarti $r = 0$ atau $r = \frac{1}{4}$. Mengingat $8 = u_2 = ar$ yang merupakan tak nol, maka haruslah $r \neq 0$ sehingga $r = \frac{1}{4}$. Ini berarti $8 = ar = \frac{a}{4}$ yang berarti $u_1 = a = \boxed{32}$.

. . . .

7 Diberikan segiempat $ABCD$ dengan luas segitiga AED sama dengan luas segitiga BEC. Jika $AB = 50, AE = 45$, dan $AC = 108$, maka panjang CD adalah . . . .



Jawab: 70

Perhatikan bahwa $EC = 108 - 45 = 63$. Karena $[AED] = [BEC]$, maka

$$1 = \frac{[AED]}{[BEC]} = \frac{\frac{1}{2} \cdot EB \cdot EC \cdot \sin \angle BEC}{\frac{1}{2} \cdot EA \cdot ED \cdot \sin \angle AED} = \frac{EB}{EA} \cdot \frac{EC}{ED}$$

sehingga diperoleh $\frac{EB}{EA} = \frac{ED}{EC}$. Karena $\angle AEB = \angle DEC$, maka $\triangle EAB \sim \triangle ECD$ (SAS). Jadi, $\frac{CD}{AB} = \frac{EC}{EA} = \frac{63}{45} = \frac{7}{5}$ sehingga $CD = \frac{7}{5}AB = \boxed{70}$.

. . . .

8 Banyak bilangan dua digit $\overline{ab}$ dengan $a, b \neq 0$ sehingga $\overline{ab} + \overline{ba}$ merupakan bilangan kelipatan 66 adalah . . . .

Jawab: 13

Perhatikan bahwa

$$66 \mid \overline{ab} + \overline{ba} = (10a + b) + (10b + a) = 11(a + b)$$

sehingga $6 \mid a + b$. Karena $a + b \leq 18$, maka semua kemungkinan nilai $a + b$ adalah $6, 12$, atau 18. Perhatikan bahwa untuk $a + b = 6$ ada 5 solusi: $(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 5)$, untuk $a + b = 12$ ada 7 solusi: $(3, 9), (4, 8), \cdots, (8, 4), (9, 3)$, dan untuk $a + b = 18$ ada 1 solusi yaitu $(9, 9)$. Jadi, total ada $5 + 7 + 1 = \boxed{13}$ solusi.

. . . .

9 Misalkan k adalah bilangan bulat positif terkecil kelipatan 2024 yang memiliki 28 faktor positif. Sisa hasil bagi k oleh 100 adalah . . . .

Jawab: 92

Misalkan $k = 2^a 11^b 23^c N$ di mana a, b, c, N bilangan asli degan $a \geq 3, b \geq 1, c \geq 1$, dan N tidak habis dibagi $2, 11$, maupun 23. Ini berarti $\text{FPB}(2, N) = \text{FPB}(11, N) = \text{FPB}(23, N) = 1$.

Notasikan $\tau(n)$ sebagai banyak faktor positif dari bilangan asli n yang mana bersifat multiplikatif, yaitu jika $\text{FPB}(a,b) = 1$ berlaku $\tau(ab) = \tau(a)\tau(b)$. Dari sini diperoleh

$$28 = \tau(k) = \tau\left(2^a 11^b 23^c N\right) = \tau\left(2^a\right)\tau\left(11^b\right)\tau\left(23^c\right)\tau(N) = (a+1)(b+1)(c+1)\tau(N).$$

Tinjau $a+1 \geq 4, b+1 \geq 2, c+1 \geq 2$, ini berarti hanyalah mungkin saat

$$a+1 = 7, \quad b+1 = c+1 = 2, \quad \tau(N) = 1$$

sehingga $a = 6, b = c = 1$, dan $N = 1$. Jadi, $k = 2^6 \cdot 11^1 \cdot 23^1$ sebagai satu-satunya solusi. Diperoleh sisa bagi saat dibagi 100 adalah

$$k \equiv 2^6 \cdot 11 \cdot 23 \equiv 64 \cdot 253 \equiv 64 \cdot 53 \equiv 3392 \equiv \boxed{92} \pmod{100}.$$

....

10 Misalkan x, y bilangan real positif dengan $x > y$. Diketahui bahwa $x^2 + y^2 = \frac{545}{272}xy$, maka $\frac{x+y}{x-y}$ adalah . . . .

Jawab: 33

Perhatikan bahwa

$$(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy = \frac{545}{272}xy - 2xy = \frac{545-544}{272}xy = \frac{xy}{272}.$$

Di sisi lain,

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = \frac{545}{272}xy + 2xy = \frac{545+544}{272}xy = \frac{1089}{272}xy.$$

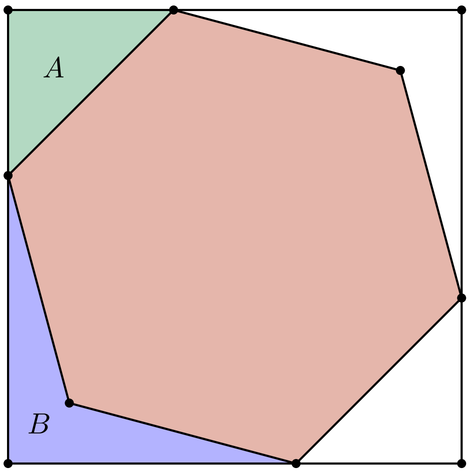
Dari sini diperoleh

$$\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2 = \frac{(x+y)^2}{(x-y)^2} = \frac{\frac{1089}{272}xy}{\frac{xy}{272}} = 1089.$$

Karena $x > y > 0$, tentu $\frac{x+y}{x-y} > 0$ sehingga $\frac{x+y}{x-y} = \sqrt{1089} = \boxed{33}$.

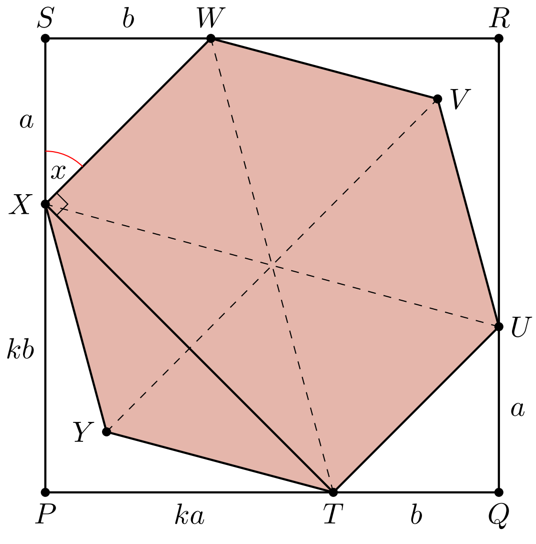
4. Solusi Kemampuan Lanjut

11 Suatu segienam beraturan disisipkan ke dalam sebuah persegi panjang seperti terlihat pada gambar di bawah ini. Jika luas A dan B berturut-turut adalah 24 dan 23, maka luas segienam beraturan adalah . . . .



Jawab:

Beri nama titik-titik sudut sebagaimana gambar di bawah dan misalkan $\angle WXS = x$.



Perhatikan bahwa besar setiap sudut interior segi enam adalah $\frac{180° \cdot (6-4)}{6} = 120°$. Perhatikan bahwa $YT = YX$, maka $\angle YXT = \angle YTX = \frac{180° - 120°}{2} = 30°$ dan $\angle TXW = 120° - 30° = 90°$. Misalkan $\angle WXS = x$, maka $\angle PXT = 180° - x - 90° = 90° - x$ dan $\angle PYX = 180° - 90° - (90° - x) = x$. Karena $\angle SXW = \angle PTX$ dan $\angle TPX = \angle SXSW$, maka $\triangle PTX \sim \triangle SXW$. Misalkan $SX = a$

dan $SW = b$, maka $\frac{PT}{PX} = \frac{SX}{SW} = \frac{a}{b}$. Misalkan $PT = ka$ dan $PX = kb$. Perhatikan bahwa $\angle WXU = 60^\circ = \angle TUX$ dan

$$\angle TUQ = \angle XUQ - 60^\circ = \angle UXS - 60^\circ = \angle SXW = x.$$

Maka diperoleh $\angle UTQ = \angle XWS$, $\angle TUQ = \angle WXS$, dan $XW = TU$ sehingga $\triangle TQU \cong \triangle XSW$ (ASA). Jadi, panjang $UQ = SX = a$ dan $TQ = SW = b$. Dari Teorema Pythagoras SXW dan PTX berlaku $XW = \sqrt{a^2+b^2}$ dan $XT = k\sqrt{a^2+b^2}$. Perhatikan bahwa panjang $YT = TX = XW = \sqrt{a^2+b^2}$. Dari aturan cosinus $\triangle XYT$, maka

$$\begin{aligned}
XT^2 &= YT^2 + YX^2 - 2 \cdot YT \cdot YX \cos 120^\circ \\
k^2\left(a^2+b^2\right) &= a^2+b^2+a^2+b^2-2\left(a^2+b^2\right)\left(-\frac{1}{2}\right) \\
k^2\left(a^2+b^2\right) &= 3\left(a^2+b^2\right)
\end{aligned}$$

sehingga $k = \sqrt{3}$. Karena $24 = [SXW] = \frac{ab}{2}$, maka $ab = 48$ dan

$$[PTX] = \frac{ka \cdot kb}{2} = k^2 \cdot \frac{ab}{2} = 3(24) = 72$$

sehingga $[TXY] = 72 - 23 = 49$. Dari sini diperoleh pula

$$49 = [TXY] = \frac{1}{2} \cdot YT \cdot YX \cdot \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot \left(a^2+b^2\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \implies a^2+b^2 = \frac{196}{\sqrt{3}}.$$

Perhatikan bahwa segienam tersebut dibentuk dari enam segitiga sama sisi dengan panjang sisi $\sqrt{a^2+b^2}$, maka luas segienam tersebut adalah

$$6 \cdot \frac{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2}{4}\sqrt{3} = 6 \cdot \frac{a^2+b^2}{4} \cdot \sqrt{3} = 6 \cdot \frac{\frac{196}{\sqrt{3}}}{4} \cdot \sqrt{3} = \boxed{294}.$$

....

12 Banyaknya himpunan bagian A dari $\{24, 25, 26, \cdots, 35\}$ sehingga hasil penjumlahan unsur terbesar dan terkecil dari A sama dengan 59 adalah . . . .

Jawab: 1365

Misalkan $a \in A$ anggota terkecil dari A, maka anggota terbesar dari A haruslah $59 - a$ untuk $24 \le a \le 29$. Untuk $a = 29$ hanya ada 1 kemungkinan. Untuk $24 \le a \le 28$, di sini untuk anggota lainnya dipilih dari interval $[a+1, 58-a]$ yang mana ada $58 - a - (a+1) + 1 = 58 - 2a$ anggota. Karena anggota lainnya memiliki 2 kemungkinan: menjadi anggota atau tidak menjadi anggota dari A, maka ada 2^{58-2a} pemilihan. Dengan menjumlahkan semua kemungkinan untuk $24 \leq a \leq 29$, banyak kemungkinannya adalah

$$2^{10} + 2^8 + 2^6 + 2^4 + 2^2 + 1 = \boxed{1365}.$$

. . . .

13 Untuk setiap bilangan asli n, misalkan $f(n)$ menyatakan faktor ganjil terbesar dari n dan $p(n) = f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n)$. Jika $p(n) = 8145$, maka nilai dari n adalah . . . .

Jawab: 90

Perhatikan bahwa jika n ganjil maka $f(n) = n$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} p(n+1) &= f(n+1) + f(n+2) + \cdots + f(2n) + f(2n+1) + f(2n+2) \\ p(n) &= f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n). \end{aligned}$$

Kurangkan kedua persamaan, diperoleh $p(n+1)-p(n) = f(2n+1)+f(2n+2)-f(n)$. Perhatikan bahwa faktor ganjil terbesar $2n+2 = 2(n+1)$ hanya bergantung dari faktor ganjil terbesar dari $n+1$. Karena $2n+1$ juga ganjil, maka

$$p(n+1) - p(n) = 2n + 1 + f(n+1) - f(n) \iff p(n+1) - f(n+1) = (p(n) - f(n)) + 2n + 1.$$

Misalkan $q(n) = p(n) - f(n)$, maka $q(n+1) = q(n) + 2n + 1$ sehingga $q(n+1) - q(n) = 2n + 1$ untuk setiap bilangan asli n. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} q(n+1) - q(n) &= 2n + 1 \\ q(n) - q(n-1) &= 2n - 1 \\ &\vdots \\ q(2) - q(1) &= 3 \end{aligned}$$

dan jumlahkan semuanya diperoleh

$$q(n+1) - q(1) = 3 + 5 + \cdots + (2n-1) + (2n+1) = \frac{n}{2}(2(3) + (n-1)(2)) = n(n+2).$$

Di sisi lain, $q(1) = p(1) - f(1) = f(1) + f(2) - f(1) = f(2) = 1$ sehingga $q(n+1) = n(n+2) + 1$ sehingga $q(n) = (n-1)(n+1) - 1 = n^2$ untuk setiap bilangan asli $n \geq 2$. Jadi, $p(n) = f(n) + n^2$. Akan ditentukan nilai n sehingga $p(n) = 8145$, ini berarti $f(n) + n^2 = 8145$ sehingga $n \leq 90$. Perhatikan bahwa untuk $n = 90$ memenuhi karena $f(90) + 90^2 = 45 + 8100 = 8145$, sedangkan $f(89) + 89^2 = 89 + 7921 = 8010 < 8145$ sehingga tentu $f(n) + n^2 < 8145$ untuk $n \leq 89$. Jadi, $n = \boxed{90}$.

. . . .

14 Diberikan suku banyak $P(x) = x^3 + Dx^2 + Ex + 1$ dan $P(-1) = 4$. Jika a, b, c merupakan akar-akar dari $P(x) = 0$ memenuhi

$$\left(a^2 - bc\right)\left(b^2 - ca\right)\left(c^2 - ab\right) = 40.$$

Maka nilai dari $(D + E)^2$ adalah . . . .

Jawab: 8

Perhatikan bahwa $4 = P(-1) = -1 + D - E + 1$ sehingga $D - E = 4$. Dari Teorema Vieta, maka $a + b + c = -D$, $ab + bc + ca = E$, dan $abc = -1$. Kalikan kedua ruas pada persamaan yang diberikan,

$$\begin{aligned} abc\left(a^2 - bc\right)\left(b^2 - ca\right)\left(c^2 - ab\right) &= 40abc \\ \left(a^3 - abc\right)\left(b^3 - abc\right)\left(c^3 - abc\right) &= -40 \\ \left(a^3 + 1\right)\left(b^3 + 1\right)\left(b^3 + 1\right) &= -40 \\ (a+1)\left(a^2 - a + 1\right)(b+1)\left(b^2 - b + 1\right)(c+1)\left(c^2 - c + 1\right) &= -40. \end{aligned}$$

Karena a, b, c akar-akar dari $P(x)$, maka $P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$. Ini berarti

$$4 = P(-1) = (-1 - a)(-1 - b)(-1 - c) = -(1 + a)(1 + b)(1 + c)$$

sehingga $(a + 1)(b + 1)(c + 1) = -4$. Ini berarti

$$\left(a^2 - a + 1\right)\left(b^2 - b + 1\right)\left(c^2 - c + 1\right) = 10.$$

Tinjau ω dan γ merupakan akar dari $X^2 - X + 1 = 0$. Dari Teorema Vieta tentu $\omega + \gamma = 1$ dan $\omega\gamma = 1$. Ini berarti $X^2 - X + 1 = (X - \omega)(X - \gamma)$ sehingga

$$\begin{aligned} \left(a^2 - a + 1\right)\left(b^2 - b + 1\right)\left(c^2 - c + 1\right) &= (a - \omega)(a - \gamma)(b - \omega)(b - \gamma)(c - \omega)(c - \gamma) \\ &= [(a - \omega)(b - \omega)(c - \omega)][(a - \gamma)(b - \gamma)(c - \gamma)]. \end{aligned}$$

Tinjau bahwa

$$P(\omega) = (\omega - a)(\omega - b)(\omega - c) = -(a - \omega)(b - \omega)(c - \omega).$$

Ini berarti

$$10 = (-P(\omega))(-P(\gamma)) = (\omega^3 + D\omega^2 + E\omega + 1)(\gamma^3 + D\gamma^2 + E\gamma + 1).$$

Perhatikan bahwa $X^2 - X + 1 = 0$ berarti $X^2 = X - 1$. Ini berarti $X^3 = X^2 - X = (X-1) - X = -1$. Ini berarti $\omega^3 = \gamma^3 = -1$ sehingga

$$\begin{aligned}
10 &= (-1 + D\omega^2 + E\omega + 1)(-1 + D\gamma^2 + E\gamma + 1) \\
&= \omega\gamma(D\omega + E)(D\gamma + E) \\
&= D^2\omega\gamma + DE(\omega + \gamma) + E^2 \\
&= D^2 + DE + E^2 \\
&= (D - E)^2 + 3DE \\
&= 16 + 3DE
\end{aligned}$$

sehingga $DE = -2$. Jadi, $(D+E)^2 = (D-E)^2 + 4DE = 16 + 4(-2) = \boxed{8}$.

. . . .

15 Banyaknya barisan bilangan bulat positif dengan enam suku $a_1, a_2, \cdots, a_6$ yang mungkin sehingga $1 \leq a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \leq 4$ dan tidak ada dua suku berurutan yang jumlahnya 4 adalah . . . .

Jawab: 1549

Akan diselesaikan secara rekursif, definisikan:

- A_n sebagai banyaknya barisan $a_1, a_2, \cdots, a_n$ dengan $1 \leq a_i \leq 4$ dengan $a_n = 1$ atau $a_n = 3$, serta tidak ada dua suku berurutan yang jumlahnya 4.
- B_n sebagai banyaknya barisan $a_1, a_2, \cdots, a_n$ dengan $1 \leq a_i \leq 4$ dengan $a_n = 2$, serta tidak ada dua suku berurutan yang jumlahnya 4.
- C_n sebagai banyaknya barisan $a_1, a_2, \cdots, a_n$ dengan $1 \leq a_i \leq 4$ dengan $a_n = 4$, serta tidak ada dua suku berurutan yang jumlahnya 4.

Di sini $A_1 = 2$ dan $B_1 = C_1 = 1$ serta $S_n = A_n + B_n + C_n$ sebagai total keseluruhannya. Sekarang akan ditentukan formula rekursif dari A_n, B_n, C_n.

- Akan ditinjau untuk A_{n+1}. Tinjau barisan $a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}$ dengan $a_{n+1} = 1$ atau $a_{n+1} = 3$. Jika $a_{n+1} = 1$, maka a_n bernilai 2 atau 4 sehingga ada $B_n + C_n$ cara, atau $a_n = 1$ $(*)$. Jika $a_{n+1} = 3$, maka a_n bernilai 2 atau 4 sehingga ada $B_n + C_n$ cara, atau $a_n = 3$ $(**)$. Menjumlahkan $(*)$ dan $(**)$ memberikan ada $A_{n+1} = A_n + 2B_n + 2C_n$.
- Akan ditinjau untuk B_{n+1}. Tinjau barisan $a_1, a_2, \cdots, a_n, 2$. Ini berarti $a_n = 1$ atau $a_n = 3$ yang mana ada A_n kemungkinan, atau $a_n = 4$ yang mana ada C_n kemungkinan. Jadi, $B_{n+1} = A_n + C_n$.

- Akan ditinjau untuk C_{n+1}. Tinjau barisan $a_1, a_2, \cdots, a_n, 4$, ini berarti a_n bernilai bebas sehingga $C_{n+1} = A_n + B_n + C_n$.

Diperoleh

$$A_{n+1} = A_n + 2B_n + 2C_n, \quad B_{n+1} = A_n + C_n, \quad C_{n+1} = A_n + B_n + C_n, \quad A_1 = 2, B_1 = C_1 = 1.$$

Misalkan $S_n = A_n + B_n + C_n = C_{n+1}$ sebagai banyaknya barisan dengan n suku sesuai syarat soal, tinjau

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= A_{n+1} + B_{n+1} + C_{n+1} \\ &= 3A_n + 3B_n + 4C_n \\ &= 3(A_n + B_n + C_n) + C_n \\ &= 3S_n + S_{n-1} \end{aligned}$$

dengan $S_1 = 2 + 1 + 1 = 4$ dan $S_2 = 6 + 3 + 4 = 13$. Diperoleh

$$\begin{aligned} S_3 &= 3(13) + 4 = 43, \\ S_4 &= 3(43) + 13) = 142, \\ S_5 &= 3(142) + 43 = 469, \\ S_6 &= 3(469) + 142 = 1549. \end{aligned}$$

Jadi, ada $\boxed{1549}$ kemungkinan.

. . . .

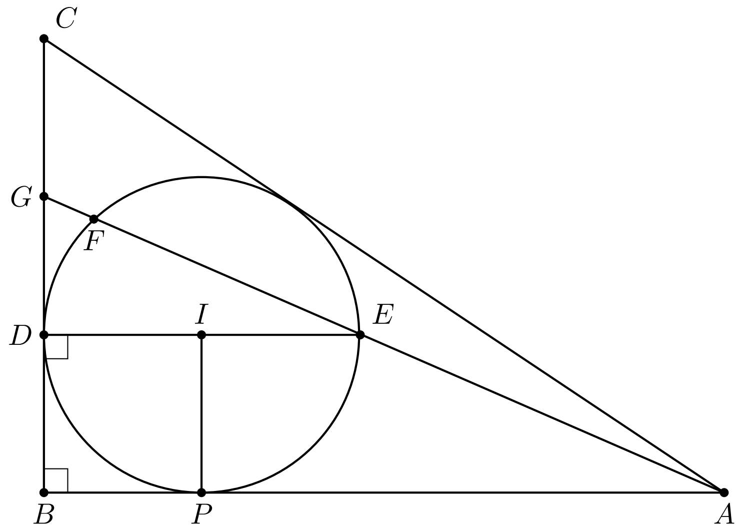
16 Diberikan sebuah segitiga ABC yang siku-siku pada sudut B. Lingkaran ω merupakan lingkaran dalam segitiga ABC yang meyinggung sisi BC pada titik D. Titik E terletak pada ω sehingga DE merupakan diameter ω. Perpanjangan garis AE memotong ω kedua kalinya di titik F dan memotong sisi BC di titik G. Apabila $EF = 3$ dan $FG = 4$, maka panjang AE dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{p}{r}\sqrt{q}$ dengan p, q, r merupakan bilangan bulat positif, satu-satunya faktor kuadrat dari q adalah 1, dan $\text{FPB}(p, r) = 1$. Nilai dari $p + q + r$ adalah . . . .

Jawab: 14

Misalkan I titik pusat lingkaran dalam dan P titik singgung lingkaran dalam dengan AB. Dari Power of Point berlaku $GD^2 = GF \cdot GE = 4 \cdot 7 = 28$ sehingga $GD = 2\sqrt{7}$. Dari Teorema Pythagoras, $DE = \sqrt{GE^2 - DG^2} = \sqrt{49 - 28} = \sqrt{21}$ yang berarti $ID = IE = IP = \frac{\sqrt{21}}{2}$. Perhatikan bahwa $\angle EDG = \angle ABG$ dan $\angle GDE = \angle BGA$ sehingga $\triangle GDE \sim \triangle GBA$. Diperoleh

$$\frac{GE}{EA} = \frac{GD}{DB} = \frac{2\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{21}}{2}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

sehingga $AE = \frac{\sqrt{3}}{4}GE = \frac{7}{4}\sqrt{3}$. Jadi, $p = 7, q = 3, r = 4$ sehingga $p + q + r = \boxed{14}$.



. . . .

17 Diketahui a, b, c merupakan bilangan real positif yang memenuhi

$$a + b + c = \frac{32}{a} + \frac{32}{b} + \frac{32}{c} = 24.$$

Nilai terbesar yang mungkin dicapai oleh $\frac{a^2+32}{a}$ adalah . . . .

Jawab: 28

Cauchy Schwarz-Engel

Diberikan bilangan real $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ dengan $b_1, b_2, \cdots, b_n > 0$. Maka berlaku

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}$$

di mana kesamaan terjadi jika dan hanya jika $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$.

Perhatikan bahwa dari Cauchy Schwarz-Engel,

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{1}{a} + \frac{(1+1)^2}{b+c} = \frac{1}{a} + \frac{4}{24-a} = \frac{24+3a}{24a-a^2}.$$

Bongkar,

$$3(24a - a^2) \geq 4(24 + 3a) \iff 24a - a^2 \geq 32 + 4a$$

sehingga $a^2 + 32 \leq 28a$ atau $a + \frac{32}{a} \leq 28$. Kondisi kesamaan terjadi saat $\frac{1}{b} = \frac{1}{c} \iff b = c$, atau jika diselesaikan salah satunya dapat tercapai saat $(a, b, c) = \left(10 + 2\sqrt{17}, 7 - \sqrt{17}, 7 - \sqrt{17}\right)$. Jadi, nilai terbesarnya $\boxed{28}$.

. . . .

18 Untuk setiap bilangan real x, notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar kurang dari atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lfloor 1{,}1 \rfloor = 1$, $\lfloor 3 \rfloor = 3$, dan sebagainya. Jika ada tepat sebanyak 1000 bilangan berbeda pada barisan

$$\left\lfloor \frac{1^2}{2024} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{2^2}{2024} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{3^2}{2024} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{n^2}{2024} \right\rfloor,$$

maka nilai dari n adalah . . . .

Jawab: 1505

Akan digunakan sifat fungsi floow, yaitu $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$. Misalkan $f(a) = \left\lfloor \frac{a^2}{2024} \right\rfloor$, maka $a_1 = a_2 = \cdots = a_{44} = 0$. Perhatikan bahwa

$$f(a+1) - f(a) > \left(\frac{(a+1)^2}{2024} - 1\right) - \frac{a^2}{2024} = \frac{2a+1}{2024} - 1.$$

Jika $a \geq 1012$, maka $f(a+1) - f(a) > 0$ sehingga $f(1012), f(1013), \cdots$ semuanya akan menghasilkan nilai-nilai yang berbeda. Jika $a < 1012$, maka

$$f(a+1) - f(a) \leq \frac{(a+1)^2}{2024} - \left(\frac{a^2}{2024} - 1\right) = \frac{2a+1}{2024} + 1 < 2.$$

Ini berarti $0 \leq f(a+1) - f(a) \leq 1$ atau $f(a+1) \leq f(a) + 1$. Karena $f(1011) = 505$ dan $f(1012) = 506$, ini berarti $f(1), f(2), \cdots, f(1011)$ mencakup 506 nilai yang berbeda (dari 0 hingga 505). Agar ada 1000 solusi, maka diperlukan $1000 - 506 = 494$ nilai berbeda lagi dari $f(1012), f(1013), \cdots$. Jadi, nilai n yang diminta adalah $1012 + 494 - 1 = \boxed{1505}$.

. . . .

19 Banyaknya pemetaan $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ sehingga $f(f(x)) \in \{2, 4\}$ untuk setiap $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ adalah . . . .

Jawab: 188

Misalkan $A = \{2, 4\}$ dan $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Andaikan untuk setiap $a \in A$ berlaku $f(a) \notin A$. Misalkan $b = f(a)$ dengan $b \notin A$, tinjau $f(b) = f(f(a)) \in A$. Namun, ini memberikan $f(f(b)) \notin A$ sehingga kontradiksi.

Kasus 1: Tepat satu elemen di A terpetakan ke A

Tanpa mengurangi keumuman $f(2) \in A$ (di akhir perlu dikalikan dengan 2 karena kasus $f(4) \in A$). Jika $f(2) = 4$, maka $f(4) = f(f(2)) \in A$ sehingga kontradiksi. Jadi, haruslah $f(2) = 2$. Agar terpenuhinya $f(f(x)) \in A$, maka ada dari $f(1), f(3), f(5)$ harus elemen A.

- Jika semua $1, 3, 5$ terpetakan ke A. Andaikan ada $t \in \{1, 3, 5\}$ yang memenuhi $f(t) = 4$, maka $f(f(t)) = f(4) \notin A$ yang mana kontradiksi. Haruslah $f(1) = f(3) = f(5) = 2$ sehingga $f(4) \in \{1, 3, 5\}$ yang ada 3 kemungkinan. Jadi, ada 3 solusi.
- Jika tepat dua dari $1, 3, 5$ terpetakan ke A, tanpa mengurangi keumuman $f(1), f(3) \in A$. Ini haruslah $f(1), f(3) \neq 4$ karena jika tidak, $f(4) = f(f(t)) \notin A$ untuk suatu $t \in \{1, 3\}$. Jadi, $f(1) = f(3) = 2$. Kemudian, diperoleh juga $f(4), f(5) \in \{1, 3\}$ sehingga ada $2 \cdot 2 = 4$ kemungkinan. Jadi, ada $\binom{3}{2} \cdot 4 = 12$ kemungkinan.
- Jika tepat satu dari $1, 3, 5$ terpetakan ke A, tanpa mengurangi keumuman $f(1) \in A$. Ini berakibat $f(3) = f(5) = f(4) = 1$ agar terpenuhi $f(f(x)) \in A$ sehingga hanya ada 1 solusi. Jadi, ada $\binom{3}{1} \cdot 1 = 3$ solusi.

Jadi, dalam kasus ini ada $2(3 + 12 + 3) = 36$ keungkinan.

Kasus 2: Semua elemen di A terpetakan ke A

Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $f(2) = f(4) = 2$ (untuk kasus sisanya analog, di akhir perlu dikalikan dengan $2^2 = 4$).

- Jika semua $1, 3, 5$ terpetakan ke A, maka setiap nilainya memiliki 2 kemungkinan sehingga ada $2^3 = 8$ cara.
- Jika tepat dua dari $1, 3, 5$ terpetakan ke A, tanpa mengurangi keumuman $f(1), f(3) \in A$ yang mana ada $2^2 = 4$ kemungkinan untuk kedua nilai tersebut. Di sini $f(5) \in \{1, 3\}$ sehingga ada 2 kemungkinan. Jadi, ada $\binom{3}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 24$ kemungkinan.
- Jika tepat satu dari $1, 3, 5$ terpetakan ke A, tanpa mengurangi keumuman $f(1) \in A$ yang mana ada 2 kemungkinan. Jika ada $t \in \{3, 5\}$ sehingga $f(t) \in \{3, 5\}$, maka $f(f(t)) \notin A$ sehingga kontradiksi. Jadi, $f(3) = f(5) = 1$ yang berarti ada $\binom{3}{1} \cdot 2 \cdot 1 = 6$ kemungkinan.

Jadi, dalam kasus ini ada $4(8 + 24 + 6) = 152$.

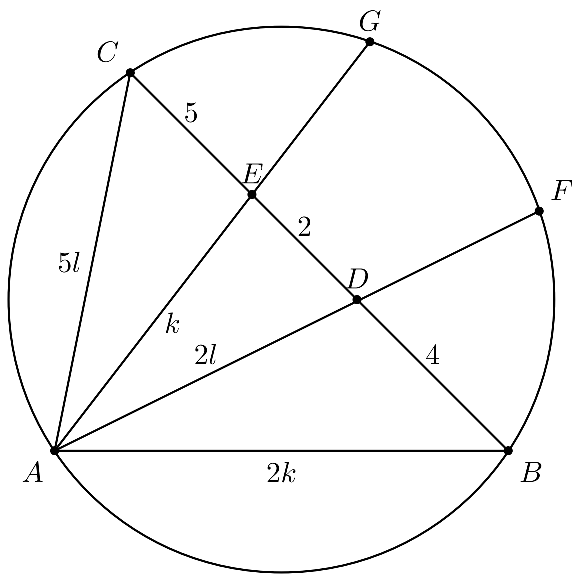
Jawabannya adalah $36 + 152 = \boxed{188}$ kemungkinan.

. . . .

20 Pada segitiga ABC, titik D dan E terletak pada garis BC sehingga B, D, E, C terletak pada urutan tersebut. Diketahui bahwa $BD : DE : EC = 4 : 2 : 5$ dan garis-garis AD, AE membagi tiga $\angle BAC$ sama besar. Garis AD dan AE masing-masing memotong lingkaran luar ABC pada titik F dan G. Nilai dari $\frac{DF}{EG}$ dapat dinyatakan dalam bentuk $\sqrt{\frac{p}{q}}$ untuk suatu bilangan bulat positif p dan q yang relatif prima, nilai dari $p+q$ adalah . . . .

Jawab: 29

Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $BD = 4, DE = 2$, dan $EC = 5$ (karena nantinya jawabannya juga menentukan rasio dua sisi yang tidak berdampak terhadap skala).



Perhatikan bahwa AD garis bagi $\angle BAE$, dari teorema garis bagi berlaku $\frac{AE}{AB} = \frac{DE}{DB} = \frac{1}{2}$ sehingga misalkan $AE = k$ dan $DB = 2k$. Karena AE garis bagi $\angle DAC$, maka $\frac{AC}{AD} = \frac{EC}{ED} = \frac{5}{2}$ sehingga misalkan $AD = 5l, ED = 2l$. Karena AD garis bagi $\angle BAE$, menggunakan teorema Stewart garis bagi AD diperoleh

$$4l^2 = AD^2 = AE \cdot AB - DE \cdot DB = 2k^2 - 8 \implies 2l^2 = k^2 - 4.$$

Daru teorema Stewart garis bagi AE,

$$k^2 = AE^2 = AC \cdot AD - EC \cdot ED = 10l^2 - 10 \implies k^2 = 10l^2 - 10.$$

Substitusikan,

$$2l^2 = k^2 - 4 = 10l^2 - 10 - 4 = 10l^2 - 14 \implies l = \sqrt{\frac{7}{4}}.$$

Ini berarti $k^2 = 10\left(l^2 - 1\right) = 10\left(\frac{7}{4} - 1\right) = \frac{30}{4}$ sehingga $k = \sqrt{\frac{30}{4}}$. Dari Teorema Power of Point berlaku

$$EG \cdot EA = EC \cdot EB \quad \text{dan} \quad DF \cdot DA = DB \cdot DC$$

sehingga $DF = \frac{14}{l}$ dan $EG = \frac{30}{k}$. Jadi,

$$\frac{DF}{EG} = \frac{14/l}{30/k} = \frac{7}{15} \cdot \frac{k}{l} = \frac{7}{15}\sqrt{\frac{30/4}{7/4}} = \frac{7}{15}\sqrt{\frac{30}{7}} = \sqrt{\frac{49}{225} \cdot \frac{30}{7}} = \sqrt{\frac{14}{15}}.$$

Ini berarti $p = 14$ dan $q = 15$ sehingga $p + q = \boxed{29}$.